ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION 1983

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve

Lundi 9 mai 1983 de 8h à 12h

Toutes les variables aléatoires considées dans le problème sont définies sur le même espace probabilisé. On rappelle que, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes, les deux variables aléatoires $X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}$ et X_n sont, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, indépendantes.

X désignant une variable aléatoire discrète finie, $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ la suite finie strictement croissante des valeurs prises par X avec une probabilité non nulle, $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, ..., $p_k = P(X = x_k)$, les probabilités attachées à chacune de ces valeurs, on note φ_X la fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t\in\mathbb{R}^* \quad \varphi_X(t) = \frac{1}{t}\operatorname{Log}\left[\sum_{i=1}^{k} p_i\, e^{x_i t}\right]$$

On rappelle enfin que la variable aléatoire X est dite non certaine si $k\geq 2$ et qu'alors sa variance est non nulle.

- I -

Exemple : Soit Z la variable aléatoire discrète telle que $P(Z = -1) = P(Z = +1) = \frac{1}{2}$

1. Ecrire $\varphi_Z(t)$ pour $t \neq 0$ et déterminer $\varphi_Z(0)$.

2. Montrer que φ_Z est dérivable sur $\mathbb{R}$; déterminer $\varphi_Z'(0)$ et $\varphi_Z'(t)$ pour $t \neq 0$.

3. Etudier les variations de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2\varphi_Z'(t) \end{array}$

En déduire les variations de φ_Z. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} \varphi_Z(t)$ et $\lim_{t\to-\infty} \varphi_Z(t)$.

Tracer la courbe représentative de φ_Z.

II - Cas général : X variable aléatoire discrète finie non certaine

1. Déterminer $\varphi_X(0)$ et le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de φ_X en fonction de l'espérance mathématique E(X) et de la variance V(X) de X. φ_X est-elle dérivable à l'origine ?

2.a. Montrer que $\forall z\in\mathbb{R}_+^*, \forall\alpha\in]0,1[\quad z^\alpha \leq 1 + \alpha(z-1)$ (1)
(On pourra par exemple, utiliser la formule de Taylor). Dans quel cas a-t-on égalité ?

b. Soient t_1 et t_2 deux nombres réels tels que $0 < t_1 < t_2$. On pose $\alpha = \frac{t_1}{t_2}$ et $z_i = e^{t_2[x_i - \varphi_X(t_2)]}$. Ecrire l'inégalité (1) pour tout z_i $(i\in\{1,2,..,k\})$ pour démontrer que $\varphi_X(t_1) < \varphi_X(t_2)$.

c. Etudier les variations de φ_X sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser φ_{-X}).

3. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} \varphi_X(t)$ et $\lim_{t\to-\infty} \varphi_X(t)$. Tracer la courbe représentative de φ_X.

III - Etude de l'application : $X \longmapsto \varphi_X$

1. $a\in\mathbb{R}^*$, comparer φ_{X+a} et φ_{aX} à φ_X.

2. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$.

3.a. Démontrer, par récurrence sur n, que, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite strictement croissante de nombres réels, la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_n(t) = e^{\alpha_n t}$, est libre.

b. En déduire que, si X et Y désignent deux variables aléatoires discrètes finies : $\varphi_X = \varphi_Y$ si et seulement si X et Y ont même loi de probabilité.

4. Caractériser les variables aléatoires X telles que φ_X soit impaire.

5. Démontrer que :
$\forall a\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}_+, \quad e^{at} P(X \geq a) \leq e^{t\varphi_X(t)}$

.../...

6. Montrer que la fonction φ_{U_N} associée à la variable aléatoire discrète uniforme U_N définie par : $P(U_N=0)= P(U_N=1)= \ldots = P(U_N = N-1) = \frac{1}{N}$ $(N \geqslant 1)$ est telle que : $\forall t\in\mathbb{R}^* \ \varphi_{U_N}(t) = \frac{N-1}{2} + \frac{1}{t} \operatorname{Log}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{Nt}{2}}{N\operatorname{sh}\frac{t}{2}}\right]$. Retrouver ainsi $E(U_N)$ et $V(U_N)$.

Ecrire $\varphi_{a+rU_N}(t)$ pour a et t réels et r réel non nul.

IV - Dans ce paragraphe on donne une suite de <u>variables aléatoires indépendantes</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui sauf au IV-4, <u>suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire Z définie</u> au I, et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de <u>nombres réels strictement positifs</u>. On note, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$Y_n = u_1 X_1 + u_2 X_2 + \ldots + u_n X_n$$

1. <u>On suppose que</u> : $\forall n\in\mathbb{N}^* \ u_n = 1$.

a. Montrer, en utilisant III-5, que : $\forall a>0 \quad P(|Y_n|\geqslant a) \leqslant 2\, M_n(a)$ où $M_n(a) = \inf_{t\in\mathbb{R}_+}\left[e^{-at}\,(\operatorname{ch}t)^n\right]$

b. Etudier les variations de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(t) = e^{-at}\,(\operatorname{ch}t)^n$.

En déduire la valeur de $M_n(a)$ (on distinguera les trois cas $n<a$, $n=a$, $n>a$).

Vérifier, par un calcul direct que, si $n \leqslant a$, on a : $P(|Y_n|\geqslant a)= 2\, M_n(a)$

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} M_n(a)$ et donner un équivalent de $M_n(a) - \lim_{n\to+\infty} M_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

2. <u>On suppose que</u> : $\forall n\in\mathbb{N}^* \ u_n = \frac{1}{2^n}$

a. Démontrer que, si $t \neq 0$: $\varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{t} \operatorname{Log}\left[\frac{\operatorname{sh}t}{2^n \operatorname{sh}\frac{t}{2^n}}\right]$

b. En déduire que l'ensemble des valeurs prises par Y_n est $\left\{\pm \frac{2k-1}{2^n} \ k\in\{1,2,\ldots,2^{n-1}\}\right\}$

et donner la probabilité attachée à chacune de ces valeurs (comparer $\varphi_{Y_n}(t)$ à $\varphi_{a+rU_N}(t)$ obtenue au III-6).

Revenant à la définition de φ_{Y_n}, démontrer que :

$$\frac{\operatorname{sh}t}{2^n \operatorname{sh}\frac{t}{2^n}} = \prod_{k=1}^{2^{n-1}} \operatorname{ch}\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right)$$

c. Déterminer, pour tout t réel, $\lim_{n\to+\infty} \varphi_{Y_n}(t)$.

d. Démontrer qu'il n'existe pas de variable aléatoire discrète finie T telle que

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad \varphi_T(t) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_{Y_n}(t)$$

3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>quelconque</u>.

Montrer que la suite $(\varphi_{Y_n}(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout t réel si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n^2$ converge.

4. On suppose que, les notations restant celles du IV, les variables aléatoires indépendantes X_n suivent désormais la même loi qu'une variable aléatoire discrète finie non certaine X d'espérance E(X) et de variance V(X), et qu'enfin $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démontrer que :

a. Si $E(X) \neq 0$, la suite $(\varphi_{Y_n}(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout t réel si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

b. Si $E(X) = 0$, la suite $(\varphi_{Y_n}(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout t réel si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n^2$ converge.

c. Dans le cas où, quel que soit $n\geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{n}$, la série $\sum_{n\geqslant 2}\left[\frac{1}{n}\,\varphi_X\left(\frac{t}{n}\right) + E(X)\operatorname{Log}\frac{n-1}{n}\right]$ converge. En déduire que la suite $(\varphi_{Y_n}(t) - E(X)\operatorname{Log}n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout t réel.